

## LEKCJA 5

Ad przykład: Stonoga

SPNE: każdy gracz zaakceptuje propozycje przyjęcia dowolnej sumy w każdym okresie (czyli każdy gracz wierze, że rywal skończy grę w następnym kroku)

Interpretacja gry Stonoga:

Jeśli liczba okresów jest mała  $\Rightarrow$  SPNE jest dobrym narzędziem dla takiej gry, gdyż pozwala dokonać sensownego przewidywania wyniku gry

Jeśli liczba okresów jest bardzo duża  $\Rightarrow$  gracz I raczej odrzuci propozycję sponsora w pierwszym okresie. Przeprowadzone eksperymenty pokazują, że gracze zwykle nie kończą gry od razu w pierwszych okresach, lecz pozwalają grze potoczyć się przez kilka okresów. To wskazuje na słabość narzędzia NE.

Gra „Stonoga” jest często przedstawiana w literaturze przedmiotu w ramach krytyki NE.

**Gry dynamiczne z pełną lecz niedoskonałą informacją**  
(np. gra pryncypał agent)

Gry dynamiczne z pełną i doskonałą informacją zawierają następujące elementy:

- (1) gracze biorące udział w danej grze
- (2) kiedy każdy gracz ma wykonać swój ruch (posunięcia graczy są wykonywane sekwencyjnie)
- (3) co każdy gracz może zrobić w swoim ruchu
- (4) co każdy gracz wie w momencie jak już ma wykonać swój ruch (wszystkie poprzednie ruchy są obserwowane przez wszystkich graczy zanim następny ruch zostanie wybrany)
- (5) wypłaty dla każdego gracza w każdej możliwej sytuacji gry (wszystkie wypłaty są znane)

Gry dynamiczne z pełną lecz niedoskonałą informacją zawierają podobne elementy jak powyżej za wyjątkiem:

- (4) w pewnym momencie gry, gracz wykonujący ruch nie zna pełnej historii gry

Przykład: Dylemat więźnia

Gdy kolej dojdzie do podjęcia decyzji o ruchu przez gracza II, jego zasób wiedzy jest następujący:

- (a) gracz I wykonał już jakiś ruch
- (b) ale niewiadomo jaki

Przykład: Zabawa w orła i reszkę

Przykład: Wejście na rynek [Malawski s.64]

Firma A zastanawia się nad wprowadzeniem na rynek nowego towaru. Popyt na tego typu towar jest nieustabilizowany i może nastąpić duża albo mała sprzedaż. Ocenia się, że prawdopodobieństwo dobrej koniunktury wynosi 0,4, a słabej 0,6. Konkurencyjna firma B również zamierza wprowadzić alternatywny towar na rynek. Na spodziewaną wielkość rynku żadna z firm nie ma wpływu. Przyjmujemy że o tym decyduje los. Firma B może podjąć decyzję trochę później, kiedy już wie, czy rynek jest duży czy mały, ale nie wie jaką decyzję podjęła firma A. Zyski każdej z firm będą zależeć od tego jaka będzie koniunktura i co zrobi konkurent.

Podsumowanie do gier z pełną informacją:

- Rozwiniętą postacią gry jednoczesnej stanowi gra z niedoskonałą informacją
- Brak podgier w grach jednoczesnych (za wyjątkiem tego że gra sama w sobie stanowi podgrę)
- Każda skończona gra dynamiczna z pełną informacją ma skończoną liczbę podgier i każda podgra spełnia hipotezę równowagi Nasha (NE), a gra jako całość posiada doskonałą równowagę Nasha w podgrach (SPNE)
- Koncepcję NE stosuje się do wszystkich gier statycznych i dynamicznych z pełną informacją, natomiast SPNE – tylko do gier dynamicznych
- Bez pełnego (kompletnego) zdefiniowania strategii nie można używać NE. Strategia to kompletny plan działania, a NE to zbiór kompletnych strategii. Nie można używać koncepcji NE, jeśli strategia gracza nie obejmuje wszystkich możliwych ruchów na jakie gracz może sobie pozwolić.

## Gry powtarzane (z pełną i doskonałą informacją)

Przyszłe zachowania graczy mogą mieć wpływ na bieżące zachowania w relacjach powtarzających się.

Gra powtarzana – gra rozgrywania w czasie w wielu etapach, a w każdym etapie każdy z graczy podejmuje decyzję i w każdym etapie otrzymuje wypłatę.

Jest to jednorazowa gra dokładnie powtarzana przynajmniej jeden raz, a każde powtórzenie odbywa się w odrębnym okresie czasu. Gracze mogą doskonale nadzorować przebieg gry we wcześniejszych okresach zanim dokonają kolejnego ruchu w późniejszym okresie.

Wyniki gry powtarzanej - lista ruchów podjętych przez każdego gracza w **każdym** okresie

**Gry powtarzane w skończonym okresie czasu:**  $T < \infty$

**Gry powtarzane w nieskończoność:**  $T = \infty$

Przykład: Dylemat więźnia powtarzany skończoną ilość razy

a) Załóżmy że gra będzie powtarzana tylko raz, czyli  $T=2$ . Ile dostępnych strategii ma każdy z graczy w całej grze?

- w pierwszym okresie są 4 możliwe ruchy graczy, od których zależy przebieg gry w następnym okresie

- w drugim okresie każdy z graczy ma 2 możliwe posunięcia  $\Rightarrow 2^4 = 16$  możliwych ruchów w grze przez każdego gracza

- strategii jest jeszcze więcej, ponieważ musimy jeszcze uwzględnić 2 możliwe posunięcia dla każdego gracza w pierwszym okresie  $\Rightarrow 2 * 2^4 = 2^5 = 32$  strategii dla każdego gracza

Dla  $T=3$  liczba strategii wzrasta do  $2 * 2^4 * 2^{16} = 2^{21} = 2$  miliony strategii, ponieważ w drugim okresie mamy dodatkowe  $4 * 4 = 16$  możliwych ruchów

b) Jaka jest SPNE dla  $T=n$ ?

- rozwiązujemy grę metodą indukcji wstecz

- jedyna NE w ostatnim okresie  $n$  wynosi {przyznać się, przyznać się}

- w okresie  $n-1$  każdy z graczy wie że została jeszcze jedna gra w okresie  $n$  i że nie będą kooperować ze sobą w tym ostatnim etapie  $\Rightarrow$  NE w okresie  $n-1$  jest taka sama jak w okresie  $n$

- w każdym poprzednim okresie wydarzy się to samo

SPNE: każdy z graczy wybiera „przyznać się” w każdym okresie bez względu na to ile razy powtarzamy grę (pod warunkiem że gra jest powtarzana skończoną ilość razy)



Gra powtarzana skończoną liczbę razy ma jedną SPNE jeśli gra w pojedynczym okresie posiada tylko jedną NE (w każdym okresie będzie taka sama NE).

Uwaga: w pewnych okolicznościach (np. przy wielu NE) współpraca pomiędzy graczami może stanowić równowagę w grze powtarzalnej, która nie byłaby możliwa w grze jednorazowej.

Gry kooperacyjne - możliwa jest komunikacja między graczami oraz zawiązywanie wiążących i egzekwowalnych umów między nimi

Przykład: Jednoczesna gra w dwóch okresach

	L	C	R
T	1, 1	5, 0	0, 0
M	0, 5	4, 4	0, 0
B	0, 0	0, 0	3, 3

Czy para strategii  $\{M, C\}$  może być równowagą SPNE (czyli, czy gracze mogą kooperować przy SPNE)?

Sposób rozumowania dla racjonalnego gracza:

Graj  $\{M, C\}$  w pierwszym okresie.

Jeśli wynikiem gry w pierwszym okresie jest  $\{M, C\}$ , to w drugim okresie graj  $\{B, R\}$ . W przeciwnym razie graj  $\{T, L\}$  w drugim okresie.



$\{M, C\}$  może stanowić SPNE

czyli schemat rozumowania racjonalnego gracza w podobnych grach (wiele równowag NE) wygląda następująco:

1. Znajdź wszystkie NE w drugim okresie.

2. Jeśli przeciwnik nie kooperuje w pierwszym okresie, możesz go ukarać w następnym okresie wybierając najgorszy wynik z pośród dostępnych NE.